QUESTIONS OUVERTES

Risques financiers : quelle modélisation mathématique ?

La récente crise financière a suscité des interrogations sur le rôle des modèles mathématiques en finance. Ces modèles sont indispensables, mais il faut connaître leurs limites.

Rama CONT

Les modèles mathématiques pénètrent tous les secteurs de la finance moderne : gestion de portefeuilles, évaluation des produits dérivés, « régulation prudentielle » des banques, normes de contrôle et de gestion des risques. Pourtant, selon la formule d'un communiqué récent de l'Académie des sciences française, « leur rôle est mal connu, souvent surévalué, parfois diabolisé ». Ce débat a pris une tournure particulière dans les médias français. Dans un élan étrange qui tient plus du règlement de compte avec les mathématiques, instrument controversé de sélection dans le système éducatif français, les médias en France ont accusé les mathématiques financières d'être la cause de nos maux, en citant pêle-mêle la formule de Black-Scholes et la surmathématisation de l'économie... Des propos faciles qui, en gonflant le rôle des modèles quantitatifs, évitent de réfléchir aux racines économiques de la crise.

L'origine de la crise financière actuelle se trouve dans l'éclatement de la bulle spéculative immobilière aux États-Unis. Loin d'être un phénomène « sans précédent », comme on a pu l'entendre, cette crise répète un schéma familier pour les économistes et a connu de multiples précédents historiques, bien avant l'apparition des « mathématiques financières » ou du moindre produit dérivé.

En finance, les modèles mathématiques servent à mesurer et quantifier le risque des investissements. À ce titre, ils jouent le rôle d'outils d'aide à la décision pour les gestionnaires, les investisseurs et les régulateurs. Mais, à de rares exceptions près, une banque ou un fonds d'investissement ne fonde pas une décision majeure d'investissement sur une formule mathématique. La décision, pour les banques d'investissement américaines, d'investir massivement dans les prêts risqués (les « subprimes ») était motivée par la recherche de rentabilités toujours plus grandes, elle ne s'appuyait pas sur un modèle mathématique.

Mais, même si les modèles mathématiques ne sont pas à l'origine de cette crise, celle-ci a mis en évidence un certain nombre de défaillances dans la gestion et la modélisation des risques dans les banques, les agences de notation, les systèmes de régulation et les institutions financières. S'agit-il d'une défaillance des méthodes quantitatives, d'une mauvaise utilisation de ces méthodes ou de la non-utilisation des méthodes disponibles ?

Mon objectif ici n'est pas d'analyser la crise financière, mais plutôt de la prendre comme prétexte pour faire une radioscopie de la modélisation mathématique en finance, son rôle, ses limites et ses perspectives de développement. J'évoquerai chemin faisant des exemples de crises récentes, et moins récentes, en liaison avec les concepts discutés.

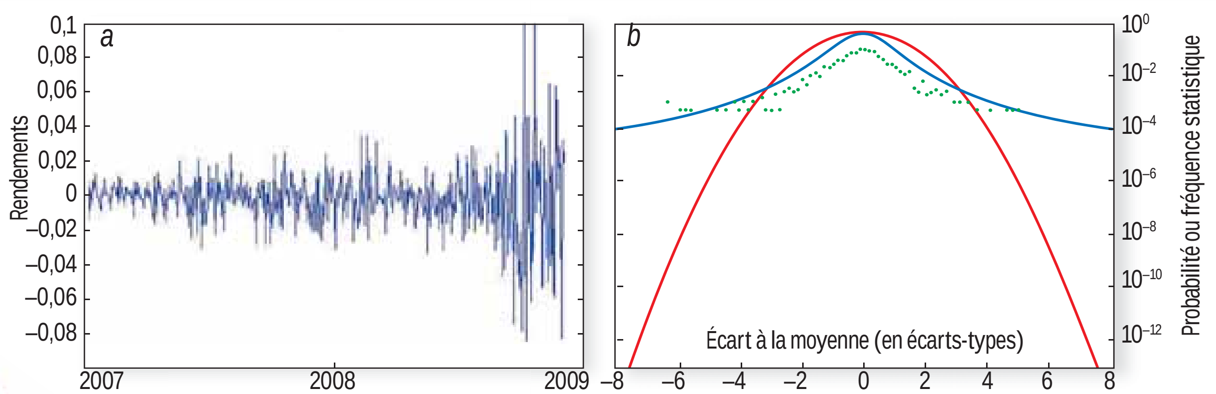
La finance est une discipline quantitative par essence : le calcul des profits et des pertes d'investissements, des intérêts sur les prêts, etc., fait intervenir des mathématiques. Leur niveau se complique dès lors qu'on s'intéresse non plus aux profits et pertes passés, mais futurs : il faut alors quantifier l'incertitude sur les mouvements futurs de prix à l'aide des probabilités et des statistiques.

Le premier à relever ce défi fut le mathématicien français Louis Bachelier qui, en 1900, modélisa les variations des prix boursiers comme des variables aléatoires indépendantes, avec cette proposition assez révolutionnaire pour une époque où la science baignait dans le déterminisme laplacien : « Le marché n'obéit qu'à une seule loi : la loi du hasard. »

Hasard sage et hasard sauvage

Bachelier supposa que les variations du prix d'une action $P(t)$ sur des intervalles de temps successifs sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi gaussienne (courbe de probabilité en forme de cloche, qui décroît exponentiellement vite de part et d'autre de la moyenne). Autrement dit, les valeurs de l'écart $P(t+h) - P(t)$ des prix entre deux instants successifs ont une probabilité décrite par une loi gaussienne, caractérisée par son écart-type, qui mesure l'ampleur des fluctuations par rapport à la moyenne, c'est-à-dire la « volatilité » de l'action.

Le modèle de Bachelier implique que le prix d'une action ou d'un indice boursier suit un processus brownien, analogue au mouvement erratique de particules microscopiques qui subissent les chocs aléatoires des



1. LES RENDEMENTS JOURNALIERS de l'indice Dow Jones en 2007 et 2008 *(a)* ont une distribution statistique *(les points dans b)* qui est plus proche d'une loi « à queues épaisses », telle la loi de Student de paramètre 3 *(en bleu)*, que d'une loi gaussienne *(en rouge)*. Les trois distributions représentées ont le même écart-type et la même moyenne.

molécules environnantes. Dans les années 1970, en modifiant légèrement le modèle de Bachelier, les Américains Fischer Black et Myron Scholes ont représenté les rendements (ou variations logarithmiques) d'une action comme des variables aléatoires indépendantes et gaussiennes.

Ces modèles ont en commun de quantifier l'incertitude sur la valeur future d'un portefeuille boursier par la notion de volatilité ou variance. Une fois ce risque quantifié, on peut déployer des outils mathématiques pour chercher à le minimiser. Harry Markowitz (prix Nobel d'économie en 1990) a ainsi proposé en 1954 une méthode pour minimiser le risque d'un portefeuille, en imposant un rendement donné. Cela a fondé la théorie de l'optimisation de portefeuille.

Une autre possibilité ouverte par ces modèles est de considérer des contrats d'assurance contre ces fluctuations de marchés – ce sont les produits dérivés ou les options – et de les valoriser un peu comme un actuaire calcule des primes d'assurance. Black, M. Scholes et R. Merton poussèrent plus loin l'analyse de Bachelier pour montrer que leurs hypothèses permettaient de calculer la valeur – ou prime – de ces contrats d'assurance. C'est la fameuse formule de Black-Scholes-Merton qui vit le jour en 1973, en même temps que la naissance du premier marché organisé d'options à Chicago, et qui marque la naissance de la théorie de l'évaluation des options.

Ces modélisations impliquent que le risque d'un portefeuille boursier peut être mesuré par un indicateur simple – sa volatilité, définie comme l'écart-type de ses rendements journaliers. Cet indicateur mesure l'ordre de grandeur des fluctuations typiques du prix sur une journée. Mais si le but est de quantifier le risque d'un portefeuille, ce ne sont pas ces variations « typiques » qui comptent, mais bien les variations extrêmes qui conduisent à des gains ou pertes spectaculaires. Or l'écart-type ne renseigne pas sur les fluctuations extrêmes, qui sont représentées par la queue de la distribution de probabilité. Si l'on suppose une distribution gaussienne pour les rendements journaliers, la probabilité qu'un rendement observé dévie de sa moyenne de quatre écarts-types est inférieur à 0,01 pour cent, soit un événement observé une fois tous les 63 ans. En revanche, si on remplace la distribution gaussienne par une distribution de Student de paramètre 3, de même écart-type, la même probabilité passe à 0,62 pour cent, soit un événement observé en moyenne deux fois par an ! On voit donc que l'hypothèse faite sur la distribution des rendements a des implications importantes pour le risque.

Comment ces chiffres se comparent-ils avec les observations de marché ? La série, sur deux ans, des rendements journaliers de l'indice Dow Jones *(voir la figure 1)* contient 16 observations dont l'amplitude dépasse quatre écarts-types : cela donne une proportion de 0,78 pour cent, un peu plus que la loi de Student et 100 fois plus que la loi gaussienne !

Benoît Mandelbrot, le père des fractales, avait signalé dès 1963 l'importance de ces fluctuations extrêmes. Il qualifia ce comportement de « hasard sauvage », par opposition au comportement aléatoire, mais continu et assez « sage », du mouvement brownien. Il suggéra alors de remplacer le mouvement brownien par une classe de processus aléatoires reflétant ce caractère sauvage : les « processus de Lévy », étudiés 30 ans plus tôt par le mathématicien français Paul Lévy et qui engendrent une évolution discontinue du prix, ponctuée de sauts.

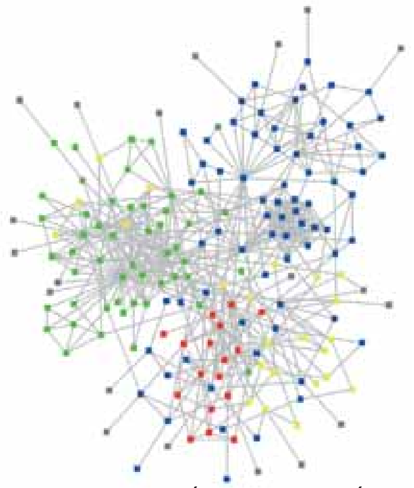
Les réserves de Mandelbrot sur la loi gaussienne, accueillies avec scepticisme dans les années 1960, figurent désormais dans tout bon manuel d'économétrie financière. Cependant, les institutions financières où l'on mesure les risques au moyen de modèles gaussiens sont encore nombreuses. Comme le constate B. Mandelbrot, la prise en compte de ces risques extrêmes aurait pu « éviter aux gens de perdre autant d'argent parce qu'ils sous-estiment leurs risques ». Voilà donc un exemple, non pas de défaillance de la modélisation quantitative, mais de l'absence d'utilisation d'outils quantitatifs pourtant disponibles dans le domaine public.

Des crises récurrentes et endogènes

Mais cette approche purement statistique du risque financier a ses limites. En effet, la représentation d'un prix boursier comme un processus aléatoire exogène dont les propriétés statistiques – volatilité et corrélations – sont stables revient à supposer une liquidité infinie du marché, qui peut absorber le flux de ventes et d'achats sans modifier la dynamique des prix. Dans cette perspective, les fluctuations aléatoires des prix résultent de l'arrivée – aléatoire – de nouvelles informations (économiques ou autres) que le marché intègre dans le prix. C'est la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers, promue par l'économiste Eugene Fama à Chicago dans les années 1970, que l'on peut résumer par l'idée que les prix de marché reflètent toujours fidèlement les informations disponibles. C'est la version financière du concept de « main invisible » d'Adam Smith : le marché fixerait le prix des actifs à leur « juste valeur ».

L'hypothèse de l'efficience des marchés a fait l'objet de nombreuses critiques au sein même de la communauté des économistes. La volatilité élevée des prix par rapport aux facteurs économiques fondamentaux et l'existence de sauts brusques dans les prix sont difficiles à concilier avec l'hypothèse que ces prix reflètent une information économique qui, elle, est moins volatile. Mais une illustration plus dramatique de la mise en défaut de l'efficience est la survenance – récurrente – de crises et de krachs boursiers, moments clefs de l'histoire financière où la liquidité du marché cesse d'être au rendez-vous.

Un premier exemple de ce qui peut arriver quand la liquidité entre en compte est l'épisode qui a conduit au krach de 1987. Un grand nombre de gérants de fonds américains s'étaient mis à utiliser une nouvelle technique de gestion, nommée « assurance de portefeuille » ; elle consiste à diminuer les parts dans un fonds lorsqu'il baisse en valeur et à



2. DIAGRAMME SCHÉMATIQUE D'UN RÉSEAU de transactions interbancaires. La défaillance d'un établissement (un nœud du réseau) ayant beaucoup de contreparties peut déstabiliser l'ensemble du marché financier. L'analyse de tels réseaux reste à faire.

les augmenter lorsque sa valeur remonte, dans des proportions précises calculées à partir de la volatilité du fonds. Selon les hypothèses du modèle de Black-Scholes, cette technique permet d'assurer le gérant contre la baisse de son fonds. Mais elle conduit à une spirale d'instabilité : en octobre 1987, une baisse initiale des prix a provoqué des ordres de vente, ce qui a engendré une nouvelle chute des prix, ce qui a à son tour accéléré le flux des ordres de vente donc accéléré la chute des prix... jusqu'au krach du 19 octobre 1987 (baisse de 22,6 pour cent de l'indice Dow Jones Industrial, 45,8 pour cent à Hong Kong, etc.). Aucune nouvelle économique particulière ne déclencha la crise : ce sont les stratégies de gestion des opérateurs de marché qui ont amorcé la chute du marché.

Ces phénomènes, assez difficiles à concilier dans le cadre de la théorie des marchés efficients, montrent le caractère endogène des crises financières et l'importance de la rétroaction des stratégies d'investissement sur le comportement des prix. Le prix n'est pas une donnée du paysage dans lequel évoluent les acteurs financiers, mais bel et bien le résultat du consensus de ces mêmes acteurs et de leur comportement collectif.

La conjonction des événements rares et des effets de rétroaction peut conduire à une amplification encore plus impressionnante des risques, comme lors de l'effondrement du fonds LTCM en 1998.

LTCM était un fonds d'investissement américain, qui comptait parmi ses associés M. Scholes et R. Merton, prix Nobel d'économie en 1997 et auteurs de la formule de Black-Scholes-Merton. Se fondant notamment sur les corrélations statistiques observées dans le passé dans les mouvements de taux d'intérêt, LTCM paria plusieurs centaines de milliards de dollars sur un retour à la normale des taux obligataires après la crise asiatique de 1997.

Survint alors l'« événement rare » : à la fin de l'été 1998, la défaillance de la Russie provoque un nouveau choc sur les marchés obligataires. Les taux d'intérêt se déplacent à l'exact opposé des anticipations de LTCM, qui voit son capital de plus de 1 200 milliards de dollars (l'équivalent du PIB du Portugal !) s'évaporer en quelques jours. La chute de LTCM a exposé aussi les principales banques d'investissement américaines, contreparties de LTCM. Il ne fallut rien moins que l'intervention de la Banque fédérale de New York et une coalition des grandes banques d'affaires de Wall Street pour éviter une crise systémique.

Ces cas, loin d'être isolés, montrent qu'une approche purement statistique ne traduit pas bien la nature du risque financier : la volatilité et la corrélation ne sont pas des données figées, mais résultent de la dynamique de l'offre et de la demande sur le marché en réponse aux mouvements même des prix. Elles montrent aussi l'importance du risque de liquidité, plus difficile à modéliser et qui n'a pas été suffisamment intégré dans les méthodes quantitatives de mesure et gestion de risques utilisées par les institutions financières.

Le cas de LTCM, comme celui, tout récent, de la banque d'affaires *Lehman Brothers*, révèlent aussi la forte interdépendance des institutions financières, désormais connectées par un réseau complexe de relations de contrepartie *(voir la figure 2)*, où les nœuds représentent les institutions financières, et les liens, les expositions (dette ou créance) entre ces institutions. La défaillance d'un nœud de ce réseau peut se propager aux nœuds voisins – les contreparties – et ainsi déclencher une crise systémique.

La volatilité des marchés, la taille sans précédent des transactions financières et leur impact non négligeable sur l'économie posent une question importante aux États, aux citoyens et aux autorités de régulation : comment contrôler ce système complexe et éviter son implosion, aux conséquences désastreuses pour l'économie et la société ?

Un système complexe à réguler... et à étudier

Le cadre actuel de « régulation prudentielle » des banques s'appuie sur une approche statistique de la modélisation du risque. Les réglementations internationales en vigueur – codifiées par les accords de Bâle II entre banques centrales – demandent aux banques de détenir une réserve de « capital réglementaire », sorte de roue de secours proportionnelle à leur « Value at Risk », définie par exemple comme la pire perte que la banque peut subir sous dix jours avec une probabilité d'au moins un pour cent.

Cette approche, destinée à protéger les établissements contre les fluctuations du marché, considère chaque institution prise isolément et semble impliquer que le « risque » d'une institution est proportionnel à sa taille. Mais elle ne tient pas compte de la position d'une institution dans le réseau complexe que constitue le marché.

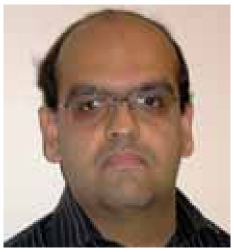
Alors que ce sont surtout des questions idéologiques qui ont dominé le débat sur la régulation, entre partisans et opposants d'une régulation plus stricte des marchés financiers, il nous semble que la question est plutôt celle – non triviale – de savoir comment concevoir des méthodes de surveillance et de contrôle efficaces pour un système aussi complexe. Si l'objectif du régulateur est de maintenir la stabilité du système financier dans son ensemble, il est nécessaire de tenir compte de la structure du réseau financier et de la position d'une institution dans ce réseau pour évaluer son risque. Cela implique de cartographier les réseaux financiers, d'étudier leurs propriétés, de réfléchir aux méthodes efficaces pour mesurer et surveiller le risque systémique dans ces réseaux, ce qui n'est pas sans analogie avec la surveillance d'une épidémie. Autant de défis pour la recherche, ce qui montre que la modélisation quantitative en finance a beaucoup de pain sur la planche...

Que cela nous plaise ou non, les marchés financiers font désormais partie intégrante du paysage économique mondial et, à ce titre, ce qui s'y passe a une influence considérable sur l'économie et la société. Qu'il s'agisse d'institutions financières cherchant à améliorer les pratiques de mesure et gestion des risques ou qu'il s'agisse d'instances gouvernementales et internationales cherchant à mieux surveiller et contrôler les fluctuations des marchés financiers, tous ont besoin de mieux comprendre ces mécanismes complexes en jeu.

La modélisation mathématique en finance, discipline encore jeune et en plein développement, est utile pour étudier et comprendre ces mécanismes. Les défis posés par la crise actuelle appellent donc non pas à un rejet de l'utilisation des mathématiques en finance, chose impossible à concevoir, mais une modélisation mathématique plus réaliste et une meilleure mise en pratique des résultats de la recherche par les acteurs du monde financier, gestionnaires et régulateurs.

Paradoxalement, la crise actuelle – expérience en grandeur nature qui met au grand jour de nombreux aspects importants des marchés financiers – est une occasion formidable pour renouveler cette discipline, en écartant les approches simplistes démenties par les faits et en essayant de répondre aux interrogations des régulateurs, des gestionnaires de risques et des citoyens. ■

L'AUTEUR



Rama CONT est directeur de recherche du CNRS au Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires (Université Paris VI-VII) ; il est aussi professeur associé à l'Université Columbia, à New York. Ses travaux portent sur la modélisation mathématique des risques financiers.

✔ SUR LE WEB

R. Cont et A. Moussa, A closer look at structured credit ratings, 2008, sur : www.cfe.columbia.edu

✔ BIBLIOGRAPHIE

R. Cont et P. Tankov, Constant proportion portfolio insurance in presence of jumps in asset prices, *Mathematical Finance*, à paraître.

P. Artus *et al.*, La crise des subprimes, La Documentation Française, 2008.

A. Orléan, L'aveuglement au désastre. Le cas des crises financières, *Esprit*, mars-avril 2008.

B. Mandelbrot et R. Hudson, Une approche fractale des marchés : risquer, perdre et gagner, Odile Jacob, 2005.

R. Cont et P. Tankov, Financial modelling with jump processes, Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

R. Shiller, Irrational exuberance, Princeton University Press, 2000.