Mathématiques

La statistique face aux événe

Rama Cont

La loi des grands nombres et la distribution gaussienne, fondements de l'étude statistique des grandeurs moyennes, échouent à rendre compte des événements rares ou extrêmes. Pour ce faire, des outils statistiques plus adaptés existent ... mais ne sont pas toujours utilisés !

Les événements rares et catastrophiques – tremblements de terre, inondations, accidents nucléaires, krachs boursiers, etc. –, dominent l'actualité de façon récurrente et fascinent notre imaginaire par leur caractère imprévisible. Ce sont aussi autant de défis à la modélisation scientifique. Exceptionnels presque par définition, ou parfois mis de côté comme « aberrations statistiques », les événements rares finissent par revenir sur le devant de la scène par l'importance des enjeux sociaux et scientifiques qu'ils représentent. Que ce soit en physique, en hydrologie ou en finance, pas de débat sérieux sur le hasard sans une réflexion sur les événements rares et extrêmes. Peut-on prévoir ou quantifier le risque des événements extrêmes ? Que peuvent les statistiques face aux événements rares ?

Dans beaucoup d'applications, notamment dans les sciences physiques, les statistiques se résument au calcul de moyennes et d'écarts-types, et la distribution des observations se répartit sagement selon la fameuse « courbe en cloche » ou distribution gaussienne. Après avoir rappelé les principes de base de la théorie statistique et retracé l'origine de la loi gaussienne, nous verrons que, pour étudier les événements rares ou extrêmes, il faut appeler à la rescousse d'autres outils statistiques. Mais nous verrons que ceux-ci, à leur tour, ne peuvent pas grand-chose contre des phénomènes extrêmes non quantifiables.

Pour le non-spécialiste, la statistique est associée à la notion de moyenne. En effet, beaucoup d'estimations statistiques reposent sur le calcul de moyennes dans un échantillon d'observations.

Le statisticien représente souvent un échantillon d'observations – de la température, du niveau de précipitations, de la tendance de vote, du rendement d'un indice boursier, etc. – comme une suite de tirages indépendants d'une « variable aléatoire » X représentant la grandeur en question. On s'intéresse alors à la moyenne,

L'ESSENTIEL

- ✔ La loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale décrivent le comportement de la moyenne d'un grand nombre de petites contributions indépendantes.
- ✔ Ils échouent cependant lorsque des événements rares ou extrêmes dominent. D'autres outils statistiques – lois de Lévy ou des valeurs extrêmes – sont alors disponibles.
- ✔ Mais quand le risque n'est pas quantifiable, ces outils se révèlent à leur tour impuissants.

ments rares

L'AUTEUR

Rama CONT est directeur de recherche CNRS au Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires (Paris). Ses travaux portent sur les processus aléatoires et la modélisation mathématique des risques financiers.

ou espérance mathématique, de cette variable aléatoire, à son écart-type (la dispersion des valeurs autour de la moyenne) et, plus généralement, à sa distribution de probabilité.

La loi des grands nombres, établie pour la première fois dans sa version la plus simple au XVIII[e] siècle par Jacques Bernoulli, assure que, lorsque la taille de l'échantillon est assez grande, la moyenne empirique de l'échantillon tend vers la moyenne théorique de la variable aléatoire qu'il représente. De même, l'écart-type empirique converge vers l'écart-type de la variable aléatoire. En garantissant qu'un échantillon fournit une bonne estimation d'une variable aléatoire réelle, la loi des grands nombres s'impose comme un des piliers de la statistique.

La loi des grands nombres est une loi asymptotique : la moyenne d'un échantillon ne converge vers l'espérance mathématique que si la taille N de l'échantillon est grande. La différence entre les deux valeurs – l'erreur statistique – est régie par le « théorème de la limite centrale » *(voir l'encadré ci-dessous)*. Ce théorème, autre pilier des statistiques, est connu sous des formes diverses depuis le XVIII[e] siècle, mais sa forme définitive, due au mathématicien français Paul Lévy, date du début du XX[e] siècle. Il affirme que, si la variable aléatoire X a un écart-type fini, alors pour un échantillon de N observations indépendantes de X, la différence entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de X est bien représentée par une distribution gaussienne dont l'écart-type est proportionnel à $1/\sqrt{N}$.

La distribution gaussienne – qui correspond graphiquement à la fameuse courbe en cloche – apparaît donc comme une description statistique de toute quantité que l'on peut représenter comme la somme d'un grand nombre de petites contributions indépendantes.

La courbe en cloche à toutes les sauces

Ces deux principes ont une grande portée. La loi des grands nombres est le fondement des sondages, car elle montre qu'il suffit de sonder un échantillon assez grand pour approcher les caractéristiques statistiques de la population réelle. Le théorème de la limite centrale permet, pour

La loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale

La loi des grands nombres énonce que lorsqu'on échantillonne une variable aléatoire, sous certaines conditions, lorsque la taille de l'échantillon est assez grande, la moyenne empirique de cet échantillon tend vers la moyenne théorique de la variable aléatoire échantillonnée. C'est sur cette loi que reposent notamment les sondages.

Considérons un échantillon d'observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'une variable aléatoire X, d'espérance μ et d'écart-type σ finis. La loi forte des grands nombres affirme que quand n tend vers l'infini, la moyenne empirique $M_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) / n$ converge presque sûrement vers μ, c'est-à-dire que la probabilité que la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique est égale à 1.

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} M_n = \mu\right) = 1$$

En d'autres termes, la moyenne d'un grand nombre d'observations aléatoires indépendantes n'est plus aléatoire ! La loi des grands nombres assure ainsi que la moyenne empirique est un estimateur convergent (ou « consistant ») de l'espérance mathématique.

Cela reste vrai tant que la contribution de chaque terme x_i à la moyenne reste négligeable : aucune observation n'est assez grande pour dominer la somme. Cette situation est qualifiée de hasard « sage ».

Le théorème de la limite centrale est l'autre pilier de l'échantillonnage. Considérons des variables aléatoires X_i, indépendantes et de même distribution (d'espérance μ et d'écart-type σ). Alors la somme centrée $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu) / \sqrt{n}$ tend vers une variable aléatoire normale (ou gaussienne) d'espérance nulle et d'écart-type σ quand n tend vers l'infini.

La densité de probabilité d'une variable gaussienne de paramètres m et σ est définie par la fonction

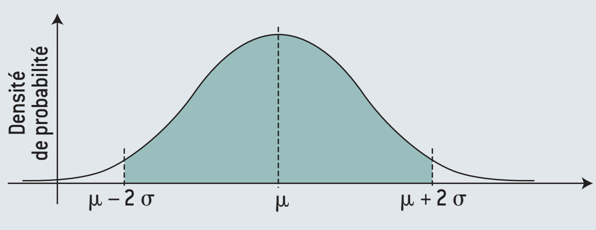
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

et sa représentation graphique est la célèbre courbe en cloche.

Le théorème de la limite centrale reste valable même si les distributions individuelles sont différentes, pour autant que l'écart-type de chacun des termes soit négligeable vis-à-vis de l'écart-type de la somme.

Ce théorème implique que la différence entre la moyenne empirique M_n de l'échantillon et l'espérance μ de la variable aléatoire X est représentée par une distribution gaussienne dont l'écart-type est proportionnel à $1/\sqrt{n}$.

Cela permet de contrôler l'erreur faite en approximant la moyenne théorique μ par la moyenne empirique M_n. La probabilité que M_n se trouve dans l'intervalle $[\mu - t\sigma, \mu + t\sigma]$ est représentée, pour n assez grand, par l'aire sous la courbe en cloche comprise entre les abcisses $\mu - t\sigma$ et $\mu + t\sigma$. Il y a par exemple 95 pour cent de chances que l'écart entre la moyenne empirique M_n et l'espérance μ soit inférieur à 2σ.



Le théorème de la limite centrale permet de quantifier la probabilité que la moyenne empirique approche la moyenne réelle avec une précision donnée.

sa part, de contrôler l'erreur ainsi commise : l'écart entre la moyenne empirique et la moyenne théorique suit une loi gaussienne.

Par exemple, si un sondage électoral porte sur 10 000 personnes et que 46 pour cent d'entre elles se déclarent favorables au candidat A, le théorème de la limite centrale indique qu'il y a 95 pour cent de chance que lors du vote, le candidat A recueille entre 45 et 47 pour cent des voix. Concrètement, il n'est pas nécessaire de sonder un très grand échantillon de la population pour avoir une estimation fiable.

Le théorème de la limite centrale est invoqué pour justifier la représentation par une distribution gaussienne dans des domaines allant des sciences sociales à la physique, en passant par l'économie, la biologie ou la finance. La courbe en cloche est mise à toutes les sauces. On l'utilise même pour « normaliser » la distribution des notes dans les concours...

Cependant, l'omniprésence de la distribution gaussienne en statistique (d'où son qualificatif de « loi normale ») est peut-être due à la trop grande confiance des statisticiens plutôt qu'à la réalité : tout phénomène ne peut pas être ramené à une somme de petites contributions indépendantes. De fait, en sciences économiques et sociales, la loi normale paraît plutôt être l'exception que la règle.

Dès le début du XXe siècle, l'économiste Vilfredo Pareto (1848-1923) s'est par exemple intéressé à la richesse nationale italienne, et a constaté que les 20 pour cent les plus riches de la population détenaient 80 pour cent de la richesse totale du pays. Cette situation d'inégalité n'est manifestement pas bien représentée par une distribution gaussienne des richesses, dans laquelle la richesse individuelle serait concentrée autour de la richesse moyenne et les individus très riches ou très pauvres seraient très rares.

Pareto a proposé une distribution plus réaliste qui porte aujourd'hui son nom : la part d'individus ayant une richesse supérieure à un niveau u est proportionnelle à $1/u^{\alpha}$. Plus l'exposant α de cette loi de puissance est petit, plus cette proportion est grande et plus la distribution des richesses est inégalitaire.

Face à de telles distributions, les notions de moyenne et d'écart-type se révèlent inadaptées et offrent une description trompeuse. En effet, la richesse moyenne et l'écart-type peuvent par exemple rester identiques alors que la distribution des richesses se modifie (ce qui est impossible dans le cadre d'une distribution gaussienne).

Pire, si l'exposant de la loi de Pareto est inférieur à deux, alors l'écart-type de la distribution est infini. S'il est inférieur à un, c'est aussi le cas pour la moyenne. Ces indicateurs sont donc dénués de sens pour les lois de Pareto.

La loi normale mise en échec

Ce fait a conduit les économistes à définir d'autres indicateurs pour mieux caractériser les distributions inégalitaires. Le coefficient de Gini, proposé par le statisticien italien Corrado Gini en 1912, est ainsi un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure le degré d'inégalité de la distribution des richesses. Plus il est proche de 1, plus la répartition est inégalitaire. Dans le cas d'une loi de Pareto d'exposant α, le coefficient de Gini vaut $1/(2\alpha - 1)$.

Ces indicateurs se focalisent sur les plus grands événements dans un échantillon, événements d'occurrence faible, mais d'importance prépondérante. Ces « événements rares » forment ce que l'on appelle les queues de distributions.

Les lois stables de Lévy

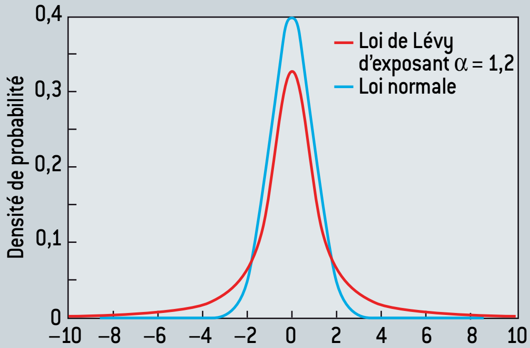
Paul Lévy était un pionnier de la théorie moderne des processus aléatoires. Il découvrit dans les années 1920, en même temps que Boris Gnedenko en Union soviétique, les distributions « stables » qui portent aujourd'hui son nom et étendit le théorème de la limite centrale au cas du « hasard sauvage ».

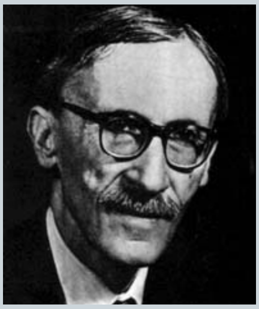
Soit une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes centrées, dont la queue de distribution se comporte comme une loi de Pareto $1/x^{\alpha}$ avec $0 < \alpha < 2$ (l'écart-type est alors infini) ; alors la somme $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ n'obéit plus au théorème de la limite centrale.

La distribution de $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n^{1/\alpha}$ se comporte, pour n assez grand, non comme une loi gaussienne, mais comme une « loi stable de Lévy » d'exposant α. À la différence du théorème de la limite centrale, le facteur de normalisation est ici $n^{1/\alpha}$ au lieu de n.

Les distributions stables n'ont pas de formules analytiques explicites, sauf dans le cas $\alpha = 1$ (loi de Cauchy) et $\alpha = 1/2$.

Leur queue de distribution se comporte comme $1/|x|^{\alpha}$ pour $|x|$ assez grand : la somme a la même queue de distribution que chacun de ses termes.




Paul Lévy (1886-1971).

✔ BIBLIOGRAPHIE

P. Deheuvels, **La probabilité, le hasard et la certitude**, Collection *Que Sais-Je ?*, Presses Universitaires de France, 2008.

B. Mandelbrot et R. Hudson, **Une approche fractale des marchés : Risquer, perdre et gagner**, Odile Jacob, 2005.

F. Bardou, J.-Ph. Bouchaud, A. Aspect et C. Cohen-Tannoudji, **Lévy Statistics and Laser Cooling : How Rare Events Bring Atoms to Rest**, Cambridge University Press, 2002.

N. Bouleau, **Splendeurs et misères des lois de valeurs extrêmes**, *Risques*, vol. 3, pp. 85-92, 1991.

L. De Haan, **Fighting the arch-enemy with mathematics**, *Statistica Neerlandica*, vol. 44(2), pp. 45-68, 1990.

Dès lors que la moyenne et l'écart-type n'ont plus forcément de sens pour les distributions inégalitaires, qu'advient-il de la loi des grands nombres et du théorème de la limite centrale ? Dans les années 1920, Lévy fut l'un des premiers à remarquer que les hypothèses qui les sous-tendent peuvent cesser d'être valables dans le cas où des événements rares influencent de façon prépondérante la moyenne de l'échantillon.

Lévy étendit le théorème de la limite centrale à ces situations : il montra que pour un échantillon de variables centrées dont la queue de distribution se comporte comme une loi de Pareto avec un exposant compris entre 0 et 2, la moyenne empirique se comporte non plus comme une variable gaussienne, mais selon une distribution que Lévy appela « loi α-stable », dont la queue se comporte comme une loi de Pareto de même exposant α. En d'autres termes, la loi limite est une loi de Lévy, et non une loi normale. Pour ces distributions de Lévy, variance et écart-type n'ont plus de sens : ils sont infinis.

Benoît Mandelbrot, qui fut élève de Lévy à l'École polytechnique, montra en 1963 que, loin d'être une curiosité mathématique, les situations décrites par les lois de Lévy étaient omniprésentes en économie, en finance et en assurance : les rendements des matières premières, la richesse des individus ou la taille des entreprises suivent des lois de Pareto.

B. Mandelbrot qualifia ces situations, où le comportement de l'échantillon n'est plus correctement caractérisé par la moyenne et l'écart-type, de hasard sauvage, par opposition au hasard sage de la loi gaussienne.

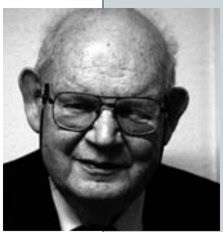
Ce comportement sauvage est par exemple manifeste dans les rendements d'indices boursiers *(voir l'encadré ci-dessous)*. Alors que l'amplitude des fluctuations d'un échantillon gaussien reste de l'ordre de son écart-type, certains indices boursiers présentent des variations d'amplitude erratiques atteignant plusieurs dizaines de fois l'écart-type !

Le hasard sauvage est plus fréquent qu'on ne l'imagine

De nombreuses autres situations se conformant aux lois de Lévy ne tardèrent pas à être mises en évidence en physique statistique : fluorescence des nanocristaux, relaxation des verres, transport turbulent, rythme cardiaque, etc. La liste est longue des systèmes où se manifestent des lois de puissance, et dont la statistique obéit à des lois de Lévy.

Cependant, bien que l'expression « hasard sauvage » suggère l'incontrôlabilité, une bonne compréhension de la nature de l'aléa permet parfois de l'apprivoiser. C'est le cas dans le mécanisme de refroidissement d'atomes par laser, dit « subrecul », mis au point il y a une dizaine d'années au laboratoire Kastler Brossel de l'École normale supérieure. Ce piège à atomes repose sur le fait que le temps passé dans le dispositif par les atomes refroidis, et donc ralentis,

Hasard sauvage contre hasard sage

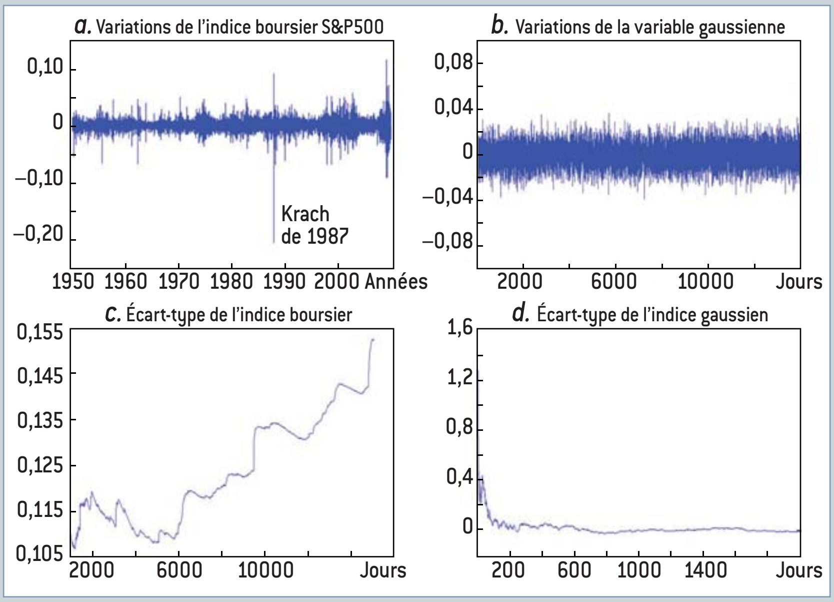


Benoît Mandelbrot *(ci-contre)* fut le premier à mettre en évidence dans les années 1960 les manifestations du « hasard sauvage » en économie et finance.

On peut illustrer la différence entre hasard sauvage et « hasard sage » en comparant les rendements journaliers d'un indice boursier réel (l'indice S&P500 de la Bourse de New York) de janvier 1950 à septembre 2009, et un échantillon de 14 000 observations simulées d'une variable aléatoire gaussienne de même moyenne (0) et même écart-type (un pour cent). Sur le graphique de l'indice boursier *(a)*, on voit que la variabilité est grande et que l'indice connaît des bouffées de volatilité. En octobre 1987, l'indice a perdu 20 pour cent de sa valeur en une journée, soit 20 fois son écart-type ! *A contrario*, les variations de la série gaussienne *(b)* restent concentrées autour de la moyenne : la plus grande perte est de quatre pour cent, soit quatre fois l'écart-type journalier.

Les écarts-types empiriques des deux séries évoluent aussi de façon très différente en fonction du nombre d'observations. Alors que l'écart-type de l'échantillon gaussien *(d)* converge doucement vers sa valeur théorique, comme le prévoit la loi des grands nombres, l'écart-type empirique des rendements de l'indice boursier *(c)* continue à osciller au fur et à mesure que de nouvelles observations sont ajoutées à l'échantillon, sans donner aucun signe de convergence.

Ces observations suggèrent que les aléas financiers relèvent du hasard sauvage, domaine où les événements extrêmes jouent un rôle déterminant. B. Mandelbrot proposa ainsi de modéliser les mouvements boursiers à l'aide des distributions de Lévy.



1. LE BARRAGE d'Ooserschelde, en Hollande, a été construit suite au raz-de-marée qui submergea le Sud-Ouest du pays en 1953 et entraîna la mort de plus de 1 800 personnes. Comme plusieurs de ses contemporains, il a été conçu pour que la probabilité qu'une marée le dépasse soit inférieure à 1/10 000. La théorie des valeurs extrêmes permit d'estimer que la hauteur des digues devait atteindre cinq mètres.

suit une loi stable de Lévy d'exposant 1/2. En particulier, le temps moyen passé dans le piège est infini.

Ainsi, face aux systèmes où se manifeste le hasard sauvage, la modélisation gaussienne se révèle impuissante et doit céder la place à d'autres outils statistiques. Mais c'est aussi le cas d'autres situations, où, indépendamment du fait que l'aléa sous-jacent soit « sage » ou « sauvage », ce n'est tout simplement pas la moyenne ou l'écart-type d'un échantillon qui sont les indicateurs pertinents, même si on peut les estimer avec précision.

Quand le maximum importe plus que la moyenne

Il en est ainsi des études de fiabilité, où, pour déterminer la probabilité de défaillance d'un système, on cherche à estimer la probabilité de défaillance de son « maillon le plus faible ». Par exemple, pour choisir la dimension et les caractéristiques d'un barrage, il faut avoir une idée précise de la pression maximale que l'ouvrage pourra être amené à supporter, et non de la pression moyenne qu'il subira en conditions normales. Pour cela, il faut caractériser directement les valeurs extrêmes dans l'échantillon d'observations. Les notions d'écart-type, de moyenne et le théorème de la limite centrale ne sont alors pas d'un grand secours...

Parallèlement aux travaux de Lévy sur le théorème de la limite centrale, un groupe de statisticiens, dont sir Ronald Fisher et Leonard Tippett en Grande-Bretagne, Boris Gnedenko en Union soviétique, Maurice Fréchet en France et Ludwig von Mises en Autriche, ainsi qu'Emil Julius Gumbel, mathématicien allemand réfugié en France, développaient une nouvelle branche des statistiques dont le but est d'étudier non plus les valeurs moyennes des échantillons, mais leurs valeurs extrêmes, c'est-à-dire maximales ou minimales.

De même que le théorème de la limite centrale décrit le comportement de la moyenne d'un grand échantillon, cette théorie des valeurs extrêmes décrit le comportement du maximum d'un échantillon.

Ces statisticiens ont montré que, selon la nature de la variable aléatoire étudiée, la valeur maximale de l'échantillon ne peut obéir qu'à l'une parmi trois distributions différentes : les distributions de Fréchet, de Gumbel ou de Weibull *(voir l'encadré page 08)*. Comme la loi normale et la loi de Lévy, qui sont des candidats naturels pour modéliser les sommes de variables indépendantes, les lois de valeurs extrêmes sont des candidats privilégiés pour la modélisation des valeurs maximales d'un échantillon. Gumbel présenta en 1941 une application de ces concepts à l'analyse statistique des crues fluviales. Cette théorie allait peu après être mise en application dans un contexte dramatique.

Les Pays-Bas ont toujours vécu sous la menace de la montée des eaux. Les nombreuses digues qui parsemaient le pays ont longtemps suffi à le protéger ; mais, dans la nuit du 31 janvier au 1er février 1953, une montée des eaux due à une tempête eut raison de leur résistance et submergea le Sud-Ouest du pays, entraînant la mort de plus de 1 800 personnes et de milliers de têtes de bétail.

Sous le choc, le gouvernement hollandais lança peu après un vaste projet de construction de barrages. La commission chargée de revoir les normes de sécurité exigea de fixer la hauteur des digues de façon à ce que la probabilité que la marée les dépasse soit inférieure à 1/10 000. Une équipe de scientifiques, armée de la récente théorie des valeurs extrêmes, se mit alors à étudier les données des marées et de crues passées afin d'estimer la distribution de probabilité de la hauteur maximale des inondations. Ils montrèrent qu'elle suit une loi de Gumbel, et que la hauteur requise dépassait cinq mètres, une nette augmentation par rapport

✔ SUR LE WEB

R. Cont, **La modélisation mathématique des risques financiers**, *Pour la Science*, janvier 2009 : http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/f/fiche-article-risques-financiers-quelle-modelisation-mathematique-18611.php

R. Cont, R. Deguest et G. Scandolo, **Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures**, 2007 : http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00413729/fr/

aux digues existantes à l'époque. Sur la base de ces estimations, d'énormes barrages furent construits *(voir la figure 1)* ; aujourd'hui encore, ils protègent le pays.

Combattre avec les mathématiques

Cette tentative d'apprivoiser les événements extrêmes est souvent citée en exemple : le statisticien néerlandais Laurens de Haan parle de « combatttre le grand ennemi avec les mathématiques ».

Dans une ambiance de foi grandissante dans les méthodes quantitatives, la théorie des valeurs extrêmes fut par la suite appliquée aux assurances, à la gestion des risques financiers et celle des risques environnementaux. Les assureurs l'utilisent par exemple pour estimer les plus grosses pertes qu'ils peuvent subir en vendant des assurances contre les catastrophes naturelles.

Le scénario catastrophe par excellence étant l'explosion d'une centrale nucléaire, toutes les idées sur la mesure des risques extrêmes ont trouvé tôt ou tard un terrain d'application dans le domaine de la sûreté nucléaire. Dans les années 1970, sont apparues les études probabilistes de sûreté (EPS), une méthodologie d'estimation de la probabilité des scénarios d'accident dans les installations nucléaires. La méthode consiste à identifier les séquences d'événements pouvant mener à un résultat catastrophique – comme la fusion du cœur de réacteur – et assigner des probabilités à ces séquences à partir de principes physiques ou de l'expérience acquise avec les accidents passés. L'objectif, comme pour les digues hollandaises, est de définir les normes à satisfaire pour garantir une probabilité d'occurrence de l'événement catastrophique inférieure à un seuil donné.

Mais en 1979, l'accident de la centrale nucléaire de Three Mile Island, en Pennsylvannie, rappela brutalement au public et aux experts en sûreté que, dans un système complexe formé de multiples composantes interdépendantes comme une centrale nucléaire, une petite erreur – humaine en l'occurrence – peut provoquer une catastrophe *(voir la figure 2)*.

Or l'occurrence de telles erreurs, qui ne sont pas liées à un facteur physique obéissant à une loi bien identifiée, est difficile, voire impossible, à quantifier. Dès lors, quelle foi accorder aux « certitudes quantitatives » produites par les études de sûreté et sur les certifications techniques qui en résultent ?

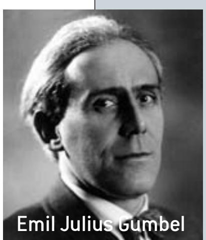
Risque et incertitude

Frank Knight, économiste américain et théoricien du risque, distinguait déjà en 1921 dans son ouvrage *Risk, Uncertainty and Profit* le risque probabilisable, correspondant à des événements dont on peut évaluer la probabilité avec une certitude raisonnable, et l'incertitude, qui recouvre des événements dont on ignore jusqu'aux probabilités d'occurrence. Lorsqu'on s'éloigne des systèmes physiques pour aller vers des domaines où les facteurs humains sont plus importants, la part de l'incertitude augmente.

Données d'observation incomplètes, hypothèses abusivement simplificatrices (telle l'indépendance des facteurs de risques, fréquemment postulée dans les modèles statistiques), ou encore omission de certains facteurs de risque, les sources d'incertitudes dans les modèles de risque sont nombreuses.

Autant de limitations qui nous invitent à rester modestes dans nos attentes envers les modèles statistiques lorsque ceux-ci ne s'appuient pas sur des principes physiques solidement ancrés.

Les lois de valeurs extrêmes



Considérons un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tirages indépendants d'une distribution de probabilité G. La théorie des valeurs extrêmes s'intéresse au comportement de la valeur maximale $U_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un chantillon de grande taille (n grand).

Un des résultats fondamentaux de la théorie, le théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko, montre que s'il existe des constantes de normalisation a_n et b_n telles que la distribution de $(U_n - a_n) / b_n$ ait une limite quand n tend vers l'infini, alors la distribution limite de la suite normalisée de maxima des variables aléatoires est nécessairement de la forme :

$$F(x;\mu,\sigma,\xi) = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}$$

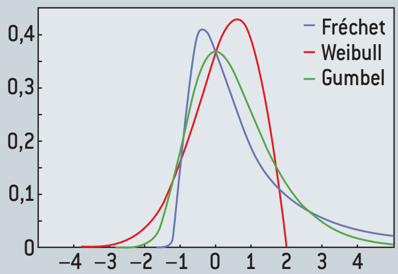
définie pour $1 + \xi(x - \mu)/\sigma > 0$, et $\sigma > 0$.

– Le cas $\xi < 0$, appelé distribution de Weibull, décrit le cas où les variables X_i sont bornées.

– Le cas $\xi = 0$, appelé distribution de Gumbel, est au maximum d'un échantillon ce que la loi normale est à la moyenne : elle représente le cas où le hasard décrit par la distribution G est sage.

– Enfin, si les variables X_i suivent une loi de Pareto d'exposant α, alors $\xi = 1/\alpha > 0$. La distribution, dite de Fréchet, décrit alors le maximum d'un échantillon qui obéit au hasard sauvage. Plus ξ est grand, plus la queue de distribution est longue, c'est-à-dire plus les événements extrêmes sont fréquents.

Ces trois lois de probabilité sont appelées distributions de valeurs extrêmes.



Les trois lois de distribution des valeurs extrêmes.

Que faire alors ? Tout au plus, peut-on compléter les résultats des modèles par l'analyse au cas par cas de scénarios extrêmes. C'est l'objet de la méthode dite de stress-test, qui apporte un complément utile aux analyses statistiques de risque. Ainsi, le CEA et EDF ont retenu cette option en complément des études EPS pour définir la politique de sûreté nucléaire.

Les statistiques montrent là leurs limites. Faut-il pour autant abandonner l'ambition de quantifier les événements rares en dehors des sciences physiques, où les principes physiques permettent de calculer leurs probabilités ?

C'est ce que semblent suggérer certains auteurs, tels l'auteur Nassim Taleb ou le mathématicien Nicolas Bouleau, de l'École nationale des ponts et chaussées, à la lumière notamment de l'apparent échec des méthodes quantitatives de gestion de risques financiers lors de la récente crise financière. Selon N. Taleb, il est en effet impossible de quantifier le risque d'événements rares catastrophiques dont nous n'avons jamais connu d'exemple par le passé. Ces « cygnes noirs », tels qu'il les qualifie, invalideraient les approches statistiques de modélisation du risque.

2. L'ACCIDENT DE LA CENTRALE NUCLÉAIRE DE THREE MILE ISLAND, le 28 mars 1979, résulte d'un enchaînement improbable de petites erreurs – dont une humaine –, chacune étant difficilement quantifiable. Était-il prévisible ? L'accident a commencé par une simple défaillance de l'alimentation en eau des générateurs de vapeur. Les pompes de secours sont entrées en service, mais l'eau n'a pu atteindre les générateurs, car une vanne située sur le trajet avait été fermée par erreur. Huit minutes ont suffi aux agents pour remédier à ce problème, mais, pendant ce temps, la pression avait grimpé dans le circuit primaire, au point de déclencher l'ouverture d'une vanne d'évacuation. Or lorsque le refroidissement fut rétabli et que la pression baissa, une seconde défaillance se produisit : cette vanne resta ouverte. En conséquence, le circuit primaire se vida peu à peu de son eau, jusqu'à ce que le cœur, insuffisamment refroidi, se mette à fondre. La catastrophe fut évitée de peu.

Des modèles limités ou mal utilisés ?

Cependant, la récente crise financière est-elle un cygne noir au même titre que l'accident de Three Mile Island, où, malgré les précautions, l'erreur humaine, non quantifiable, mit en échec le système de sûreté ? Ou ressemble-t-elle plutôt à la tempête qui ravagea les Pays-Bas en 1953, événement rare, mais dont on pouvait mesurer la probabilité ?

Je penche en faveur de la seconde option : les institutions financières sont loin d'avoir mis en pratique des méthodes adéquates pour mesurer les risques de leurs portefeuilles. Plus de 40 ans après les travaux de B. Mandelbrot, nombreux sont les établissements bancaires qui, par facilité, utilisent encore la loi normale dans leurs calculs de risques : difficile dans ces conditions de blâmer les modèles statistiques, alors qu'ils ne sont pas utilisés !

Sans aller jusqu'à affirmer, comme le faisait recemment un journaliste du *Nouvel Observateur*, que si la banque d'affaires *Lehman Brothers* avait calculé ses risques avec les distributions de Lévy, elle aurait évité la faillite, il est certain que l'utilisation de modèles plus réalistes ne pourra qu'améliorer la gestion des risques financiers.

Mais N. Bouleau soulève également un autre point, d'ordre sociologique. Les énormes enjeux sociaux de certains événements catastrophiques – météorologiques, géologiques ou économiques – ont pour conséquence d'engendrer une pression importante des décideurs publics sur les « experts » pour, sinon prévoir ces événements rares, au moins quantifier leur risque d'occurrence. La tentation est alors grande de se réfugier dans des indicateurs statistiques de risque inadaptés au lieu de reconnaître que les connaissances scientifiques actuelles ne permettent pas d'apporter de réponse à certaines questions. C'est sans doute un aspect de la défaillance des systèmes de gestion des risques financiers lors de la crise récente : indépendamment de leur précision, ils ont entretenu l'illusion d'une sécurité aux yeux de leurs utilisateurs, qui ont de ce fait baissé leur vigilance. Cette remarque appelle non pas à un rejet des méthodes statistiques de modélisation des risques, mais plutôt à une utilisation de ces méthodes avec discernement, en ayant à l'esprit leurs nombreuses limitations. ■

LES LOIS DE VALEURS EXTRÊMES ont été appliquées au secteur de l'assurance ainsi qu'à la gestion des risques financiers ou environnementaux.